

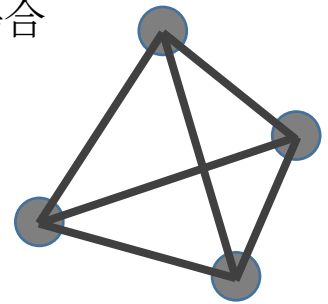
学籍番号

氏名

1. 剛体および自由度の定義を述べ、剛体の自由度を求めよ

(回答) 剛体とは、() をもつ無限に小さな () の粒子が無限個集まってできたものであり、互いの粒子間の () は変化しない。自由度とは、運動を記述するのに使う変数の数から、その変数の間に存在する独立な () の数を引いたものである。

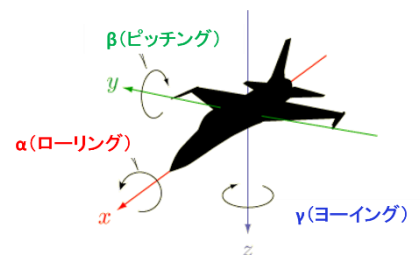
右図のように4つの粒子が4面体の頂点となる場合を考える。変数の数は () × () = () である。拘束条件は4面体の () 本の辺の長さがそれぞれ一定で変わらないことである。したがって、4個の粒子からなる剛体の自由度は、



() - () = () となる。ここに新しい粒子を加えてゆくと変数は () 個ずつ増えるが、同時に拘束条件も () 個ずつふえるため、剛体の自由度は () のままである。

2. (ロール・ピッチ・ヨー) オイラー角による剛体の姿勢表現方法について説明せよ。

(回答) 剛体の姿勢を () 個の変数であらわそうとするものである。剛体座標系をZ軸、Y軸、X軸まわりに順次 γ 、 β 、 α 回転させることで剛体の姿勢を表現する。このとき、姿勢変換行列は次式であらわせる。



$$R_{ZYX} = R_Z(\gamma)R_Y(\beta)R_X(\alpha)$$

(裏面につづく)。

3. 下図の 2020 年の東京オリンピックのエンブレムの市松模様部分は回転行列： $R(\quad)$ による変換で区別がつかない図形である（1 回転する間に 3 回区別のつかない回転位置を経由する）。他方、パラリンピックの場合は（ \quad ）を有するが、回転対称性をもたない。



オリンピックエンブレム（左）とパラリンピックエンブレム（中央）、右はヒント

直交群の概念、回転および鏡像対称性について議論せよ。また、同次変換行列は直交行列ではないことを 3 次元の場合で示せ。

（回答）直交行列(A とする)は互いに直交する（垂直な）大きさが 1 のベクトルから構成されており、 n 次元直交行列のつくる群（直交群）を $O(n)$ とよぶ（3 次元の場合は $O(3)$ となる）。回転対称性や鏡像（左右）対称性といった対称性は群という数学的概念を用いて表現される。

$O(n)$ はベクトルの（ \quad ）を保存し、なおかつ（ \quad ）性のある変換すべてを含むため、回転のみならず鏡像変換も含む。

$\det A = -1$ の変換は回転のみならず、鏡像変換も含むことが知られている。直交群のうち、とくに回転のみを含み、鏡像変換を含まない行列は $\det A = (\quad)$ を満たし、(n 次) 特殊直交群: $SO(n)$ とよばれる。

直交行列の性質のひとつとして転置行列が逆行列になる。

ここで 3 次元の同次変換行列を ${}^O_A H = \begin{bmatrix} {}^O_A R & {}^O p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする。

このとき、

$${}^O_A H^{-1} = {}^O_A H = \begin{bmatrix} {}^O_A R^T & -{}^O_A R^T {}^O p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ {}^O_A R^T & 0 \\ 0 & 0 \\ (\quad) & 1 \end{bmatrix} = {}^O_A H^T \text{ となり、}$$

${}^O_A H$ は直交行列の性質を満たさないため、直交行列ではない。