

# ロボティックス Robotics

先端工学基礎課程講義

小泉 憲裕

# 講義情報

## 【授業内容とその進め方】

### (a) 授業項目

#### 第1回 ロボット工学概論

ロボットの歴史、定義、基本構成と分類

数学基礎知識

#### 第2回 マニピュレータの基礎

構造と分類、機構表現

#### 第3回 センサとアクチュエータ

#### 第4回 座標変換

平行、回転変換、同次変換、マニピュレータの座標系の設定

#### 第5回 順運動学と逆運動学

#### 第6回 ヤコビ行列と静力学

#### 第7回 順動力学と逆動力学

#### 第8回 中間試験とその解説

#### 第9回 フィードバック制御とその安定性

#### 第10回 位置制御(PTP制御とCP制御)

#### 第11回 力制御(インピーダンス制御)

#### 第12回 マスタ・スレーブ制御

#### 第13回 遠隔操作と自律制御

#### 第14回 複数マニピュレータの協調制御

#### 第15回 期末試験とその解説

当面はこちらのサイト,

[http://www.medigit.mi.uec.ac.jp/lect\\_robotics.html](http://www.medigit.mi.uec.ac.jp/lect_robotics.html)

### (b) 授業の進め方:

PPTを用いて内容を解説したあと、演習課題を解いてもらう。また、必要に応じて宿題を課すことがある。

事前にWebClassのサーバーに講義用のPPTをアップしているのので、それを印刷して授業に持ってくる。また、授業に対する理解度を高めるために、PPT資料を用いて予習・復習することが望ましい。さらに、必要とされる数学知識を復習することも大事である。

# ロボットの運動学

## ロボットの運動学

ロボットの運動学は現在、ニュートン力学を発展させた解析力学を基盤とすることが多い。

**解析力学では物体を  
剛体としてあらわす**

# 第4回 座標変換

平行、回転、同次変換、マニピュレータの座標系の設定

# 剛体

## 剛体とは

密度をもつ無限に小さな体積の粒子が無限個集まってできたもの。体積があり、互いの粒子間の距離は変化しない。

粒子には姿勢がないが、  
剛体には姿勢がある



粘土の粒子を焼いて  
固めたレンガのようなもの

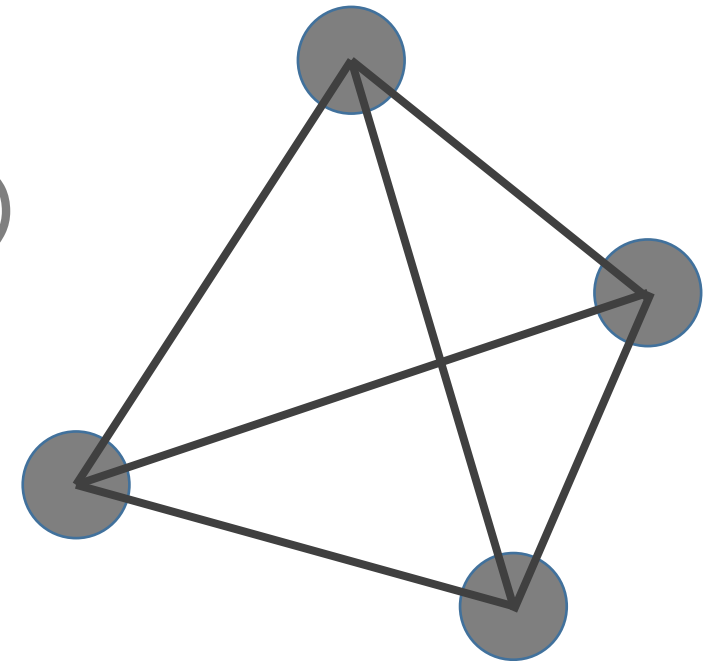
# 剛体

## 剛体の自由度

(自由度) =  
(運動を記述するのに使う変数の数)  
－ (拘束条件の数)

$$3 \times 4 - 6$$

位置3自由度    粒子数    拘束条件の数



# 剛体

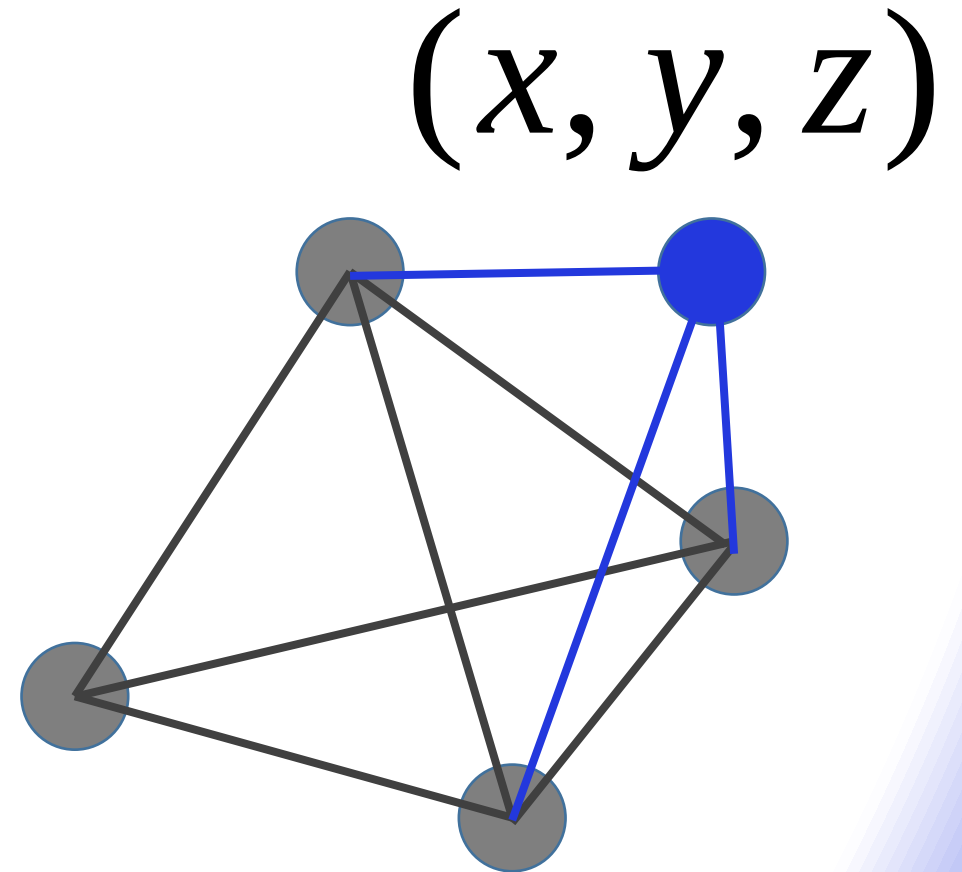
剛体の自由度

$$3 \times 4 - 6$$

追加した質点の位置を表すため  
自由度が3つ増えるが、

同時に拘束条件も3つ増えるため

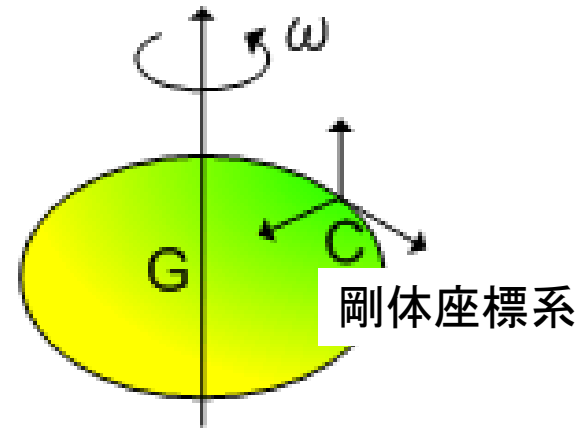
**質点が増えても  
自由度は変わらない！**



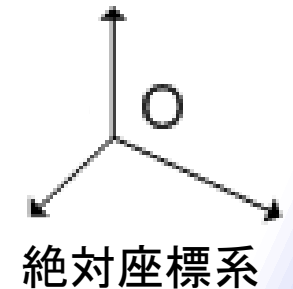
# 剛体座標系

## 剛体座標系

剛体の位置をあらわす代表的な  
粒子の位置を原点とし、  
剛体と一緒に運動する座標系



太陽を原点とする座標系と、  
地球を原点とする座標系



<http://hooktail.sub.jp/mechanics/rigidRot/>



# 座標系の平行移動

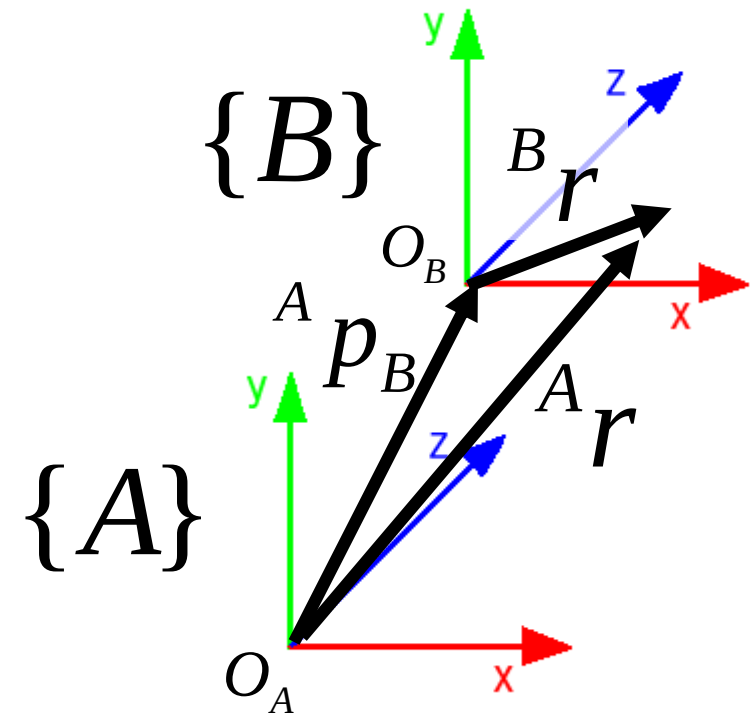
## 座標系の平行移動

$${}^A r = {}^A p_B + {}^B r$$

${}^A r$  : 座標系{A}からみた点r

${}^A p_B$  : {A}からみた{B}の原点  
 $O_B$ の位置ベクトル

${}^B r$  : 座標系{B}からみた点r



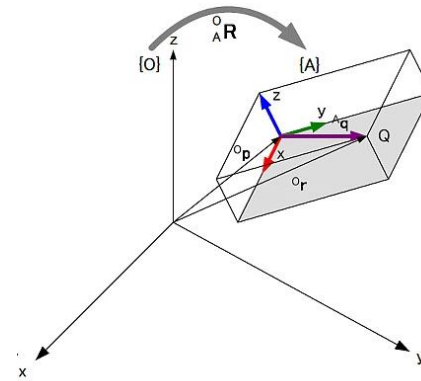
# 剛体の姿勢とその表現

## 剛体の姿勢とその表現

(表現1) 直交行列  $R$

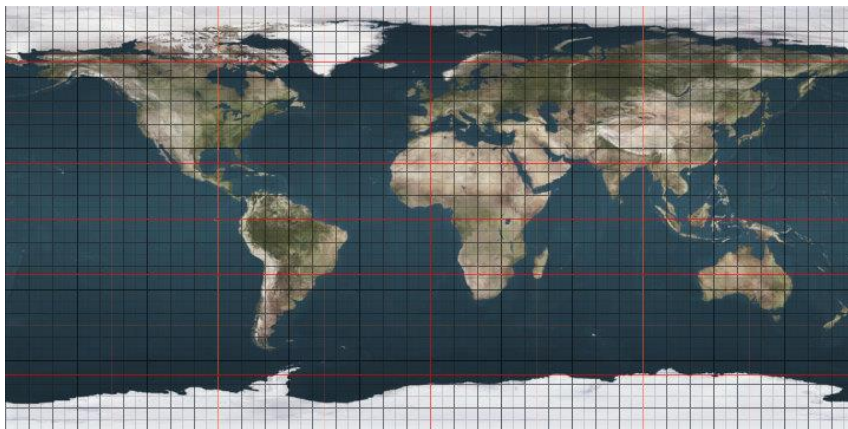
(表現2) オイラー角  $\alpha, \beta, \gamma$

(表現3) オイラーパラメータあるいは  $\beta$  (ピッチング)  
クォータニオン (四元数)



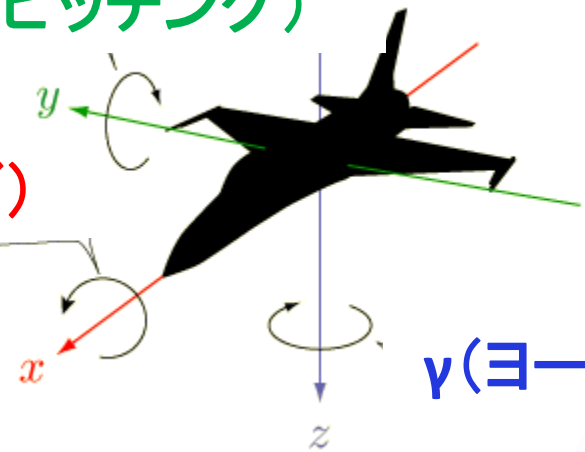
$$R = (e_x \quad e_y \quad e_z)$$

[http://www.rugbysensor.com/images/doujitrMatrix\\_01.jpg](http://www.rugbysensor.com/images/doujitrMatrix_01.jpg)



[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Earthmap720x360\\_grid.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Earthmap720x360_grid.jpg)

$\alpha$  (ローリング)



$\gamma$  (ヨーイング)

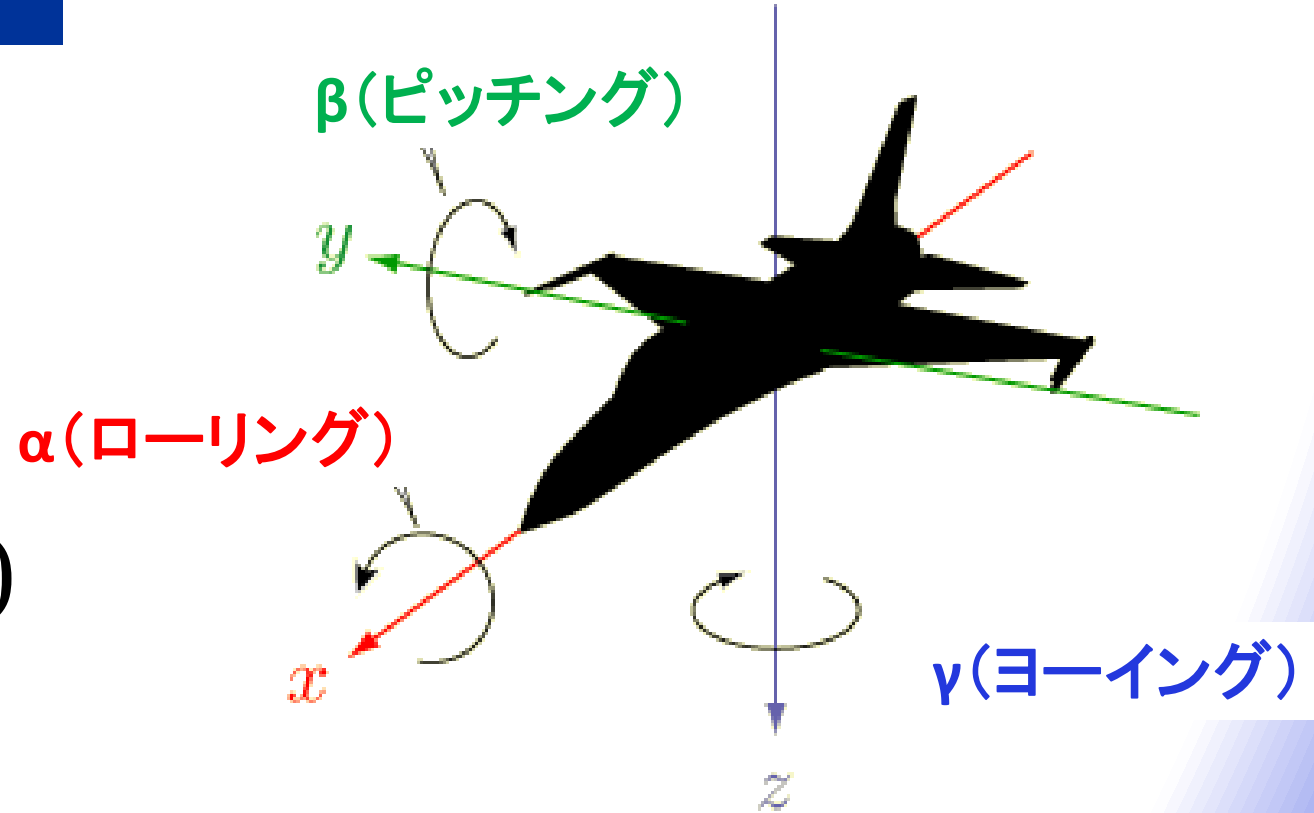
<http://hooktail.org/wiki/index.php?%B8%F8%B3%AB%C0%A9%BA%EE%2F%B2%F3%C5%BE%B9%D4%CE%F3>

# 剛体の姿勢とその表現

## 剛体の姿勢とその表現

(表現2)オイラー角 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

$$R_{ZYX} = R_Z(\gamma)R_Y(\beta)R_X(\alpha)$$



<http://hooktail.org/wiki/index.php?%B8%F8%B3%AB%C0%A9%BA%EE%2F%B2%F3%C5%BE%B9%D4%CE%F3>

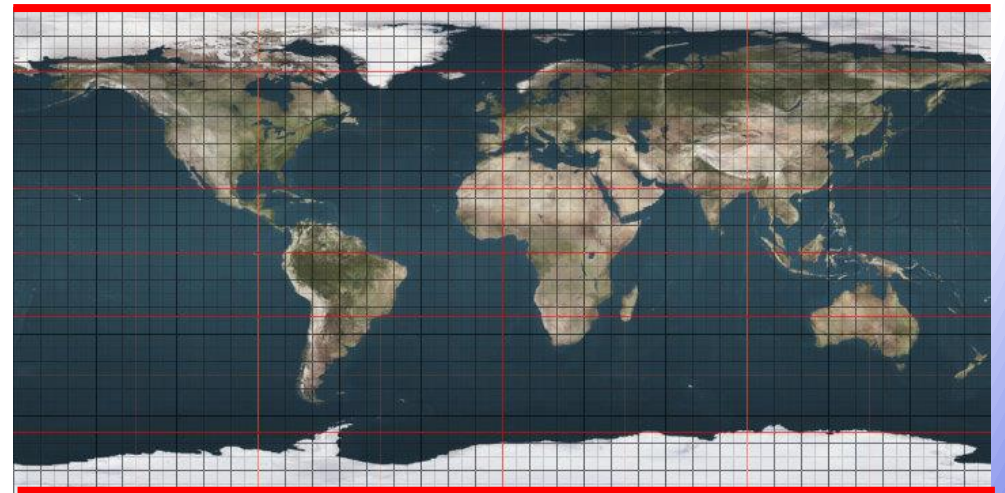
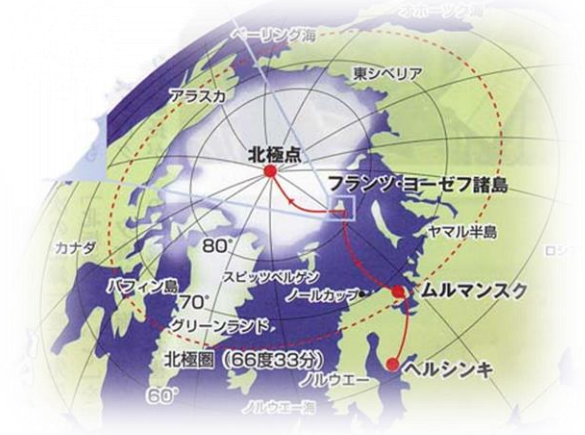
# 剛体の姿勢とその表現

# 剛体の姿勢とその表現

(表現2)オイラー角 $\alpha, \beta, \gamma$

球面は2次元の曲面であるが、これを2個の座標値で表そうとすると困難が生じる

# 北極点と南極点が 線であらわされる



# 剛体の姿勢とその表現

## 剛体の姿勢とその表現

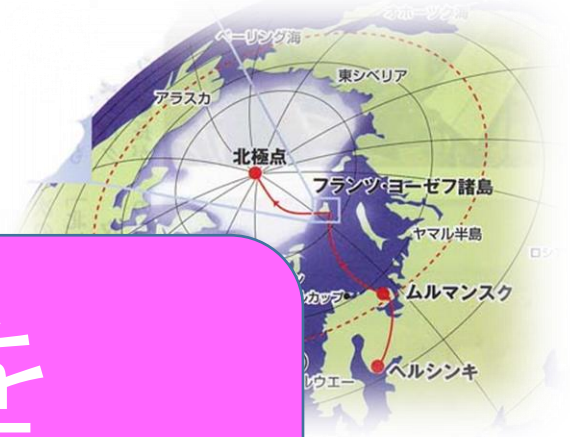
[http://blogimg.goo.ne.jp/user\\_image/2e/02/6387570b812abd6f251bb08e60385a5c.jpg](http://blogimg.goo.ne.jp/user_image/2e/02/6387570b812abd6f251bb08e60385a5c.jpg)

(表現2)オイラー角 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

球面は2次元空間  
これを2次元空間  
すると困る

剛体姿勢の空間全体を  
3変数で表すことはできない！

北極点と南極点が  
線であらわされる





# 剛体の姿勢とその表現

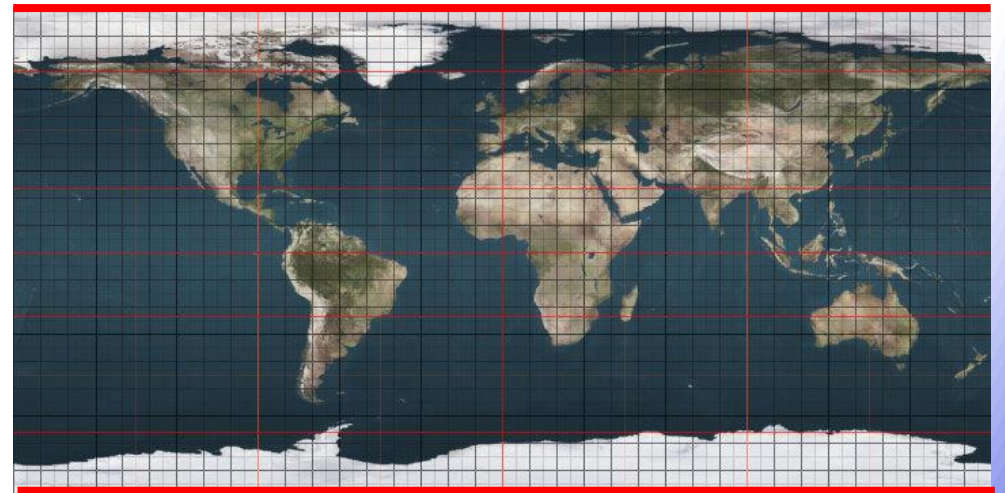
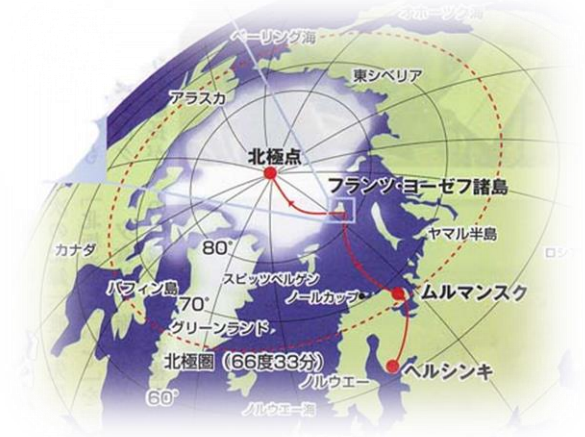
## 剛体の姿勢とその表現

[http://blogimg.goo.ne.jp/user\\_image/2e/02/6387570b812abd6f251bb08e60385a5c.jpg](http://blogimg.goo.ne.jp/user_image/2e/02/6387570b812abd6f251bb08e60385a5c.jpg)

(表現3) オイラーパラメータあるいは  
クォータニオン(四元数)

4変数と1個の拘束条件を用いて  
剛体の姿勢をあらわす。剛体姿勢  
の空間全体を最小の変数で表現。

**ロケットや人工衛星  
の姿勢制御に応用**



# 剛体の姿勢とその表現

## 剛体の姿勢とその表現

剛体の姿勢とは、**剛体座標系 {A}**  
**が絶対座標系 {O}** からみて  
**どのように傾いているか**をあらわす

$$R = \begin{pmatrix} \underset{\text{x方向の傾き}}{e_x} & \underset{\text{y方向の傾き}}{e_y} & \underset{\text{z方向の傾き}}{e_z} \end{pmatrix}$$

Rは直交行列

$$R^T = R^{-1}$$

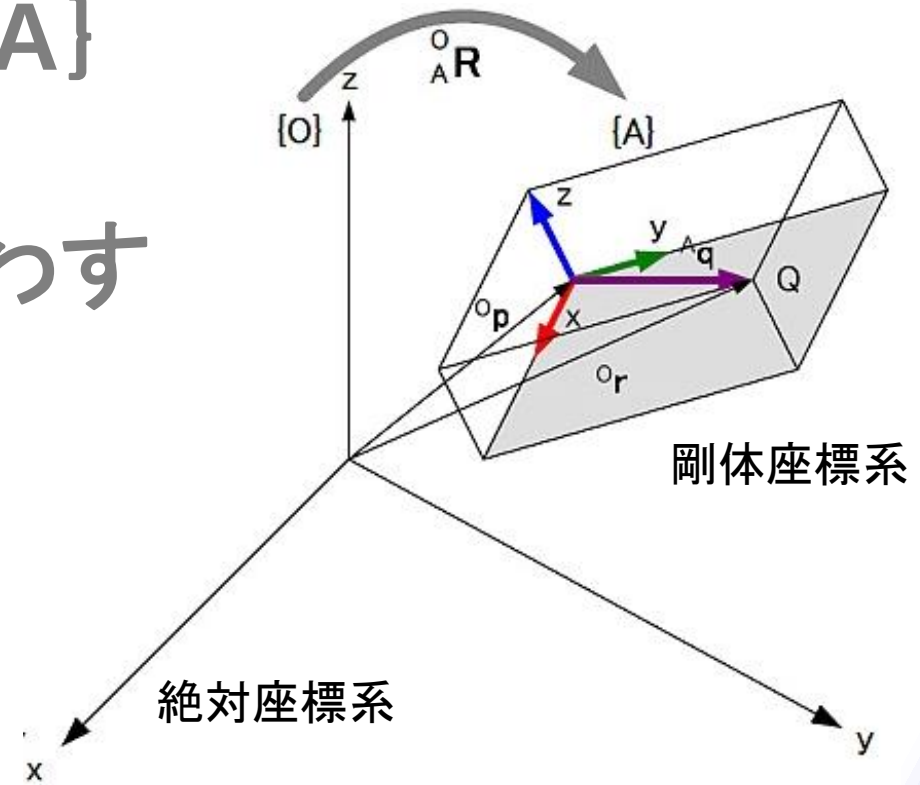
直交変換により、  
距離と角度は不変

互いに垂直

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

各々の大きさは1

[http://www.rugbysensor.com/images/doujitrMatrix\\_01.jpg](http://www.rugbysensor.com/images/doujitrMatrix_01.jpg)



[http://www.geisya.or.jp/~mwm48961/linear\\_algebra/orthonormal\\_1.gif](http://www.geisya.or.jp/~mwm48961/linear_algebra/orthonormal_1.gif)

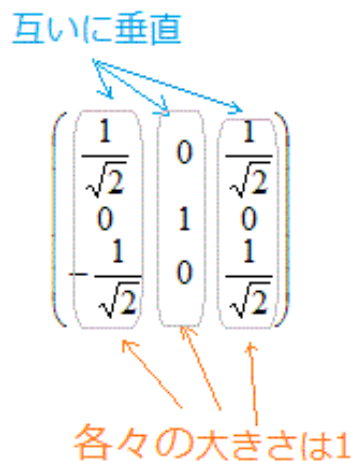
# 直交行列

## 直交行列

$$R = (e_x \quad e_y \quad e_z)$$

Rは直交行列

$$R^T = R^{-1} \quad \text{ベクトルの大きさを  
変えない}$$



東京オリンピック・パラリンピック  
エンブレムはそれぞれ回転対称  
性, 鏡像(左右)対称性を有する

回転変換、鏡像変換に対する不変性



<https://www.youtube.com/watch?v=deUTt8KQCmo>

<https://www.youtube.com/watch?v=7RPLxMKsgrs>

$O(n)$ : 直交(変換)群

回転変換、鏡像変換

$SO(n)$ : 特殊直交(変換)群

回転変換



# 姿勢変換

## 姿勢変換行列(回転行列)

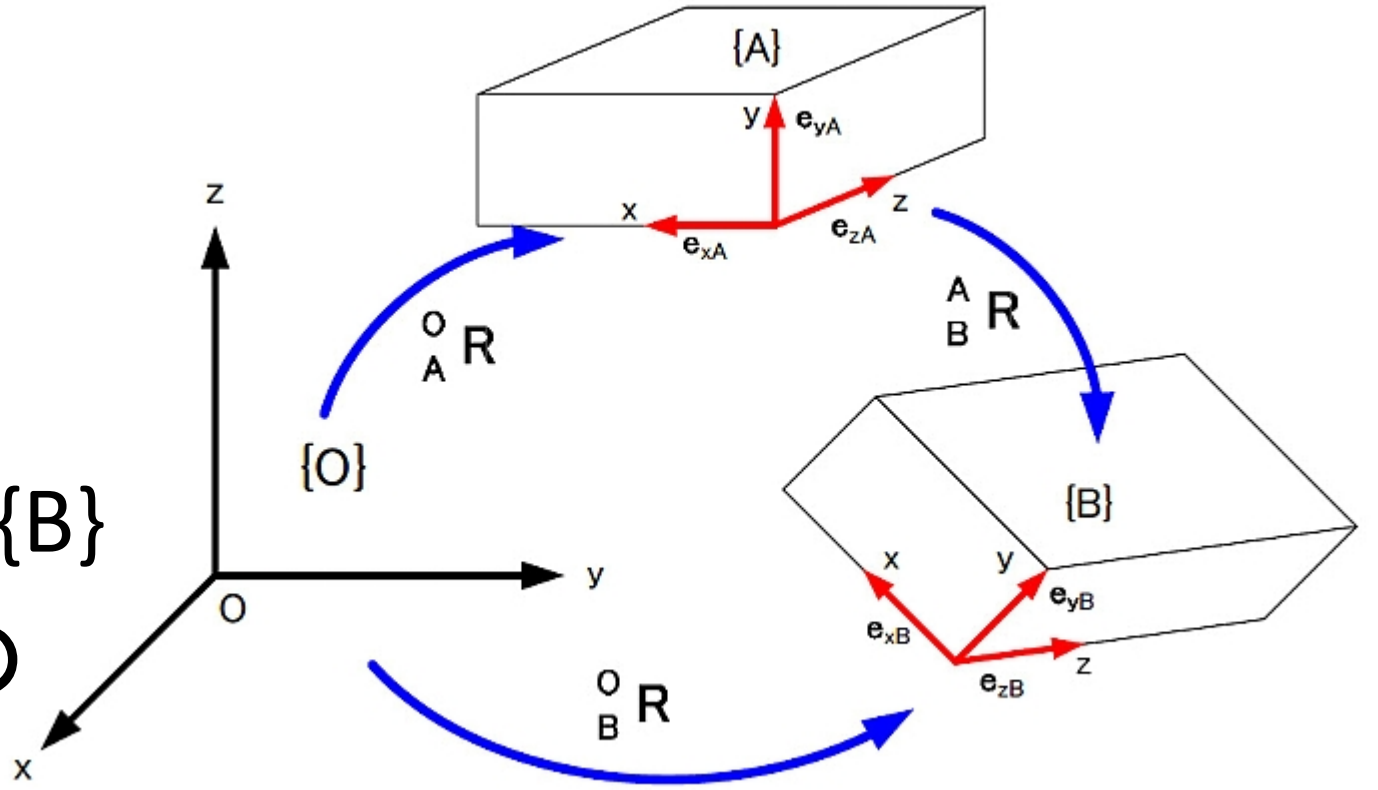
$${}^O_A R^T = [e_{xA} \quad e_{yA} \quad e_{zA}]^T$$

$${}^O_B R^T = [e_{xB} \quad e_{yB} \quad e_{zB}]^T$$

$${}^A_B R = {}^O_A R^T {}^O_B R$$

座標系{A}からみた座標系{B}

{B}の3個のベクトルの{A}の  
各軸への方向余弦を計算

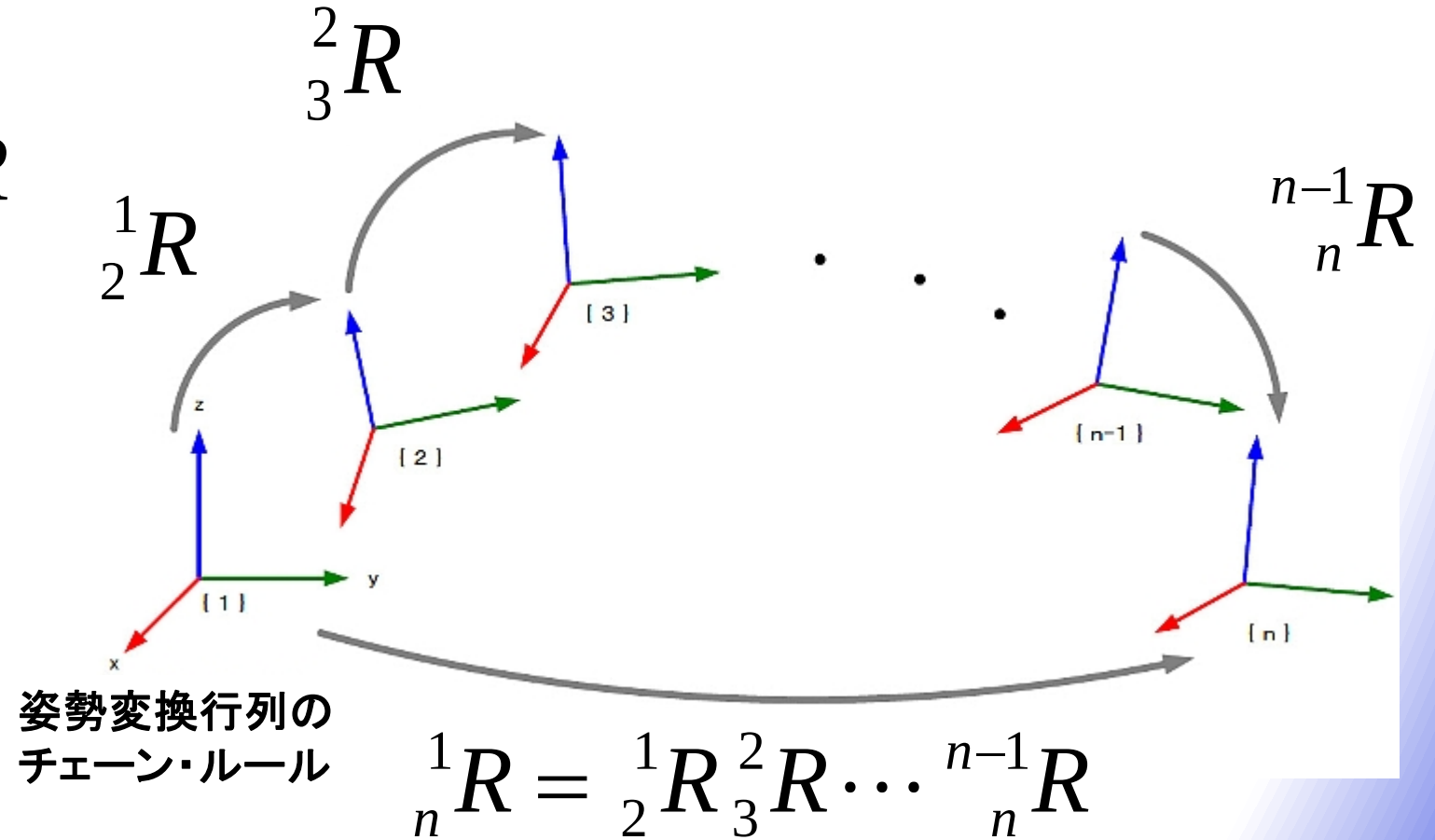


# チェーン・ルール

## チェーン・ルール

$${}^A_B R = {}^O_A R^T {}^O_B R = {}^A_O R {}^O_B R$$

相対的な姿勢変換  
行列を左から右へ  
とかけてゆくことで  
{1}→{n}の姿勢の  
変位を計算できる



[http://www.rugbysensor.com/images/doujiTr\\_chanRule\\_01a.jpg](http://www.rugbysensor.com/images/doujiTr_chanRule_01a.jpg)

# 同次変換

## 同次変換行列

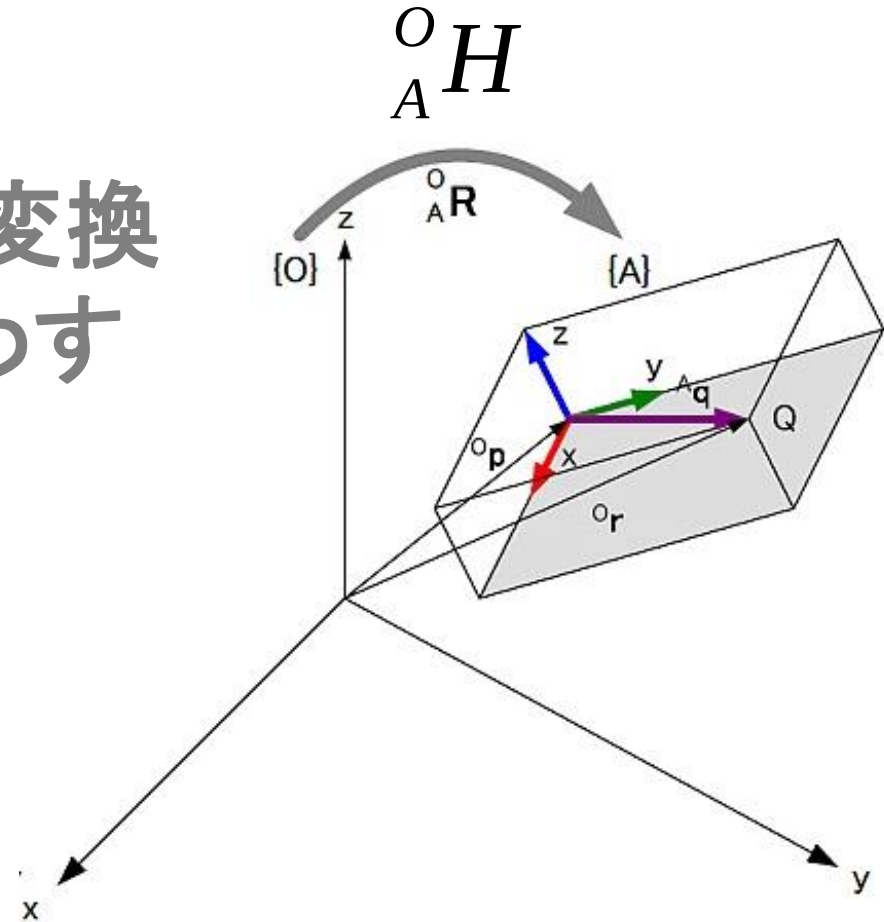
[http://www.rugbysensor.com/images/doujitrMatrix\\_01.jpg](http://www.rugbysensor.com/images/doujitrMatrix_01.jpg)

$${}^O r = {}^O p + {}^O_A R {}^A q$$

同じ式を $4 \times 4$ に拡大した同次変換行列を用いてシンプルにあらわす

$$\begin{bmatrix} {}^O r \\ 1 \end{bmatrix} = {}^O_A H \begin{bmatrix} {}^A q \\ 1 \end{bmatrix}$$

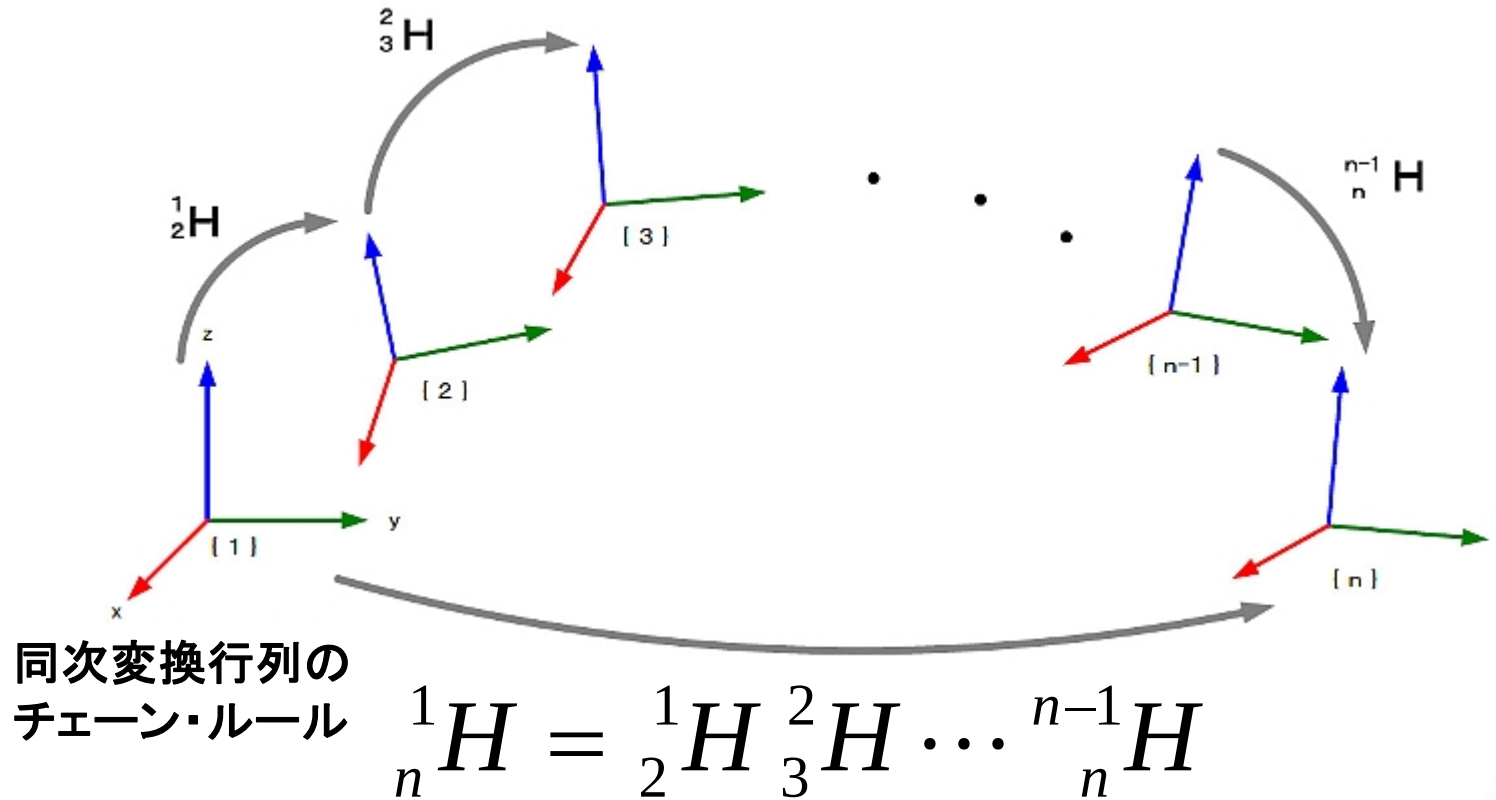
$${}^O_A H = \begin{bmatrix} & {}^O_A R & & {}^O p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# チェーン・ルール

## チェーン・ルール

姿勢変換行列と同様に  
チェーン・ルールが成立



[http://www.rugbysensor.com/images/doujiTr\\_chanRule\\_01a.jpg](http://www.rugbysensor.com/images/doujiTr_chanRule_01a.jpg)

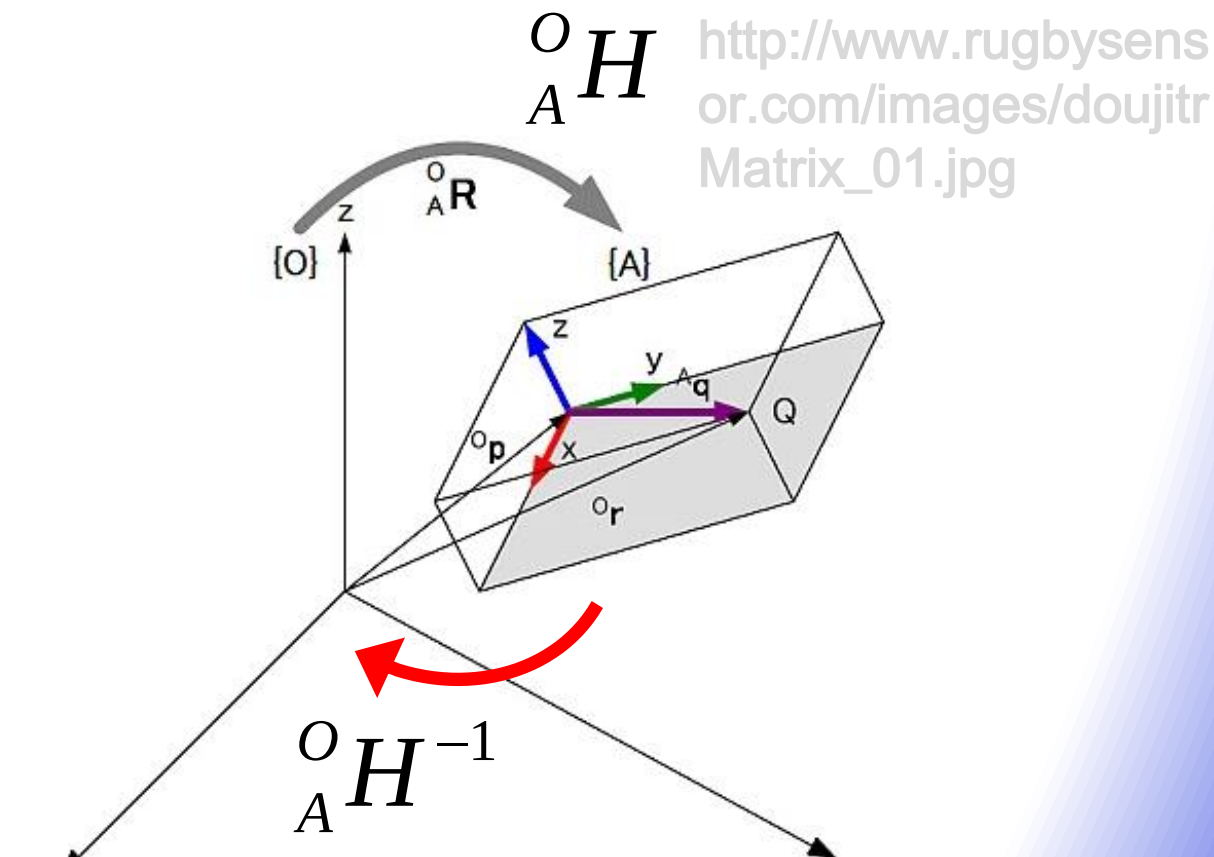
# 同次変換の逆変換

## 同次変換行列

$${}^O_A H = \begin{bmatrix} {}^O_A R & {}^O p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 同次変換行列の逆行列

$$\begin{aligned} {}^O_A H^{-1} &= {}^A_O H \\ &= \begin{bmatrix} {}^O_A R^T & -{}^O_A R^T {}^O p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



同次変換行列は  
直交行列ではない

# 同次変換の逆変換

3次元の同次変換行列を ${}^O_A H = \begin{bmatrix} {}^O_A R & {}^O p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする。

このとき、

$${}^O_A H^{-1} = {}^A_O H = \begin{bmatrix} {}^O_A R^T & -{}^O_A R^T {}^O p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} {}^O_A R^T & 0 \\ ( ) & 1 \end{bmatrix} = {}^O_A H^T \text{となり、}$$

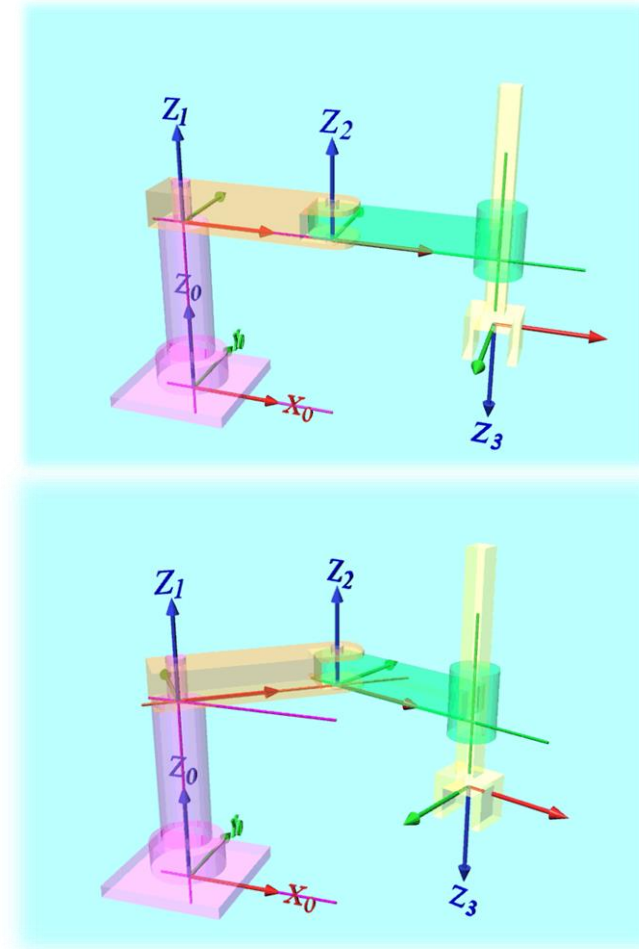
${}^O_A H$ は直交行列の性質を満たさないため、直交行列ではない。



# 修正Denavit-Hartenberg記法

## 修正DH記法

(1) 基準(腕口ロボットなら地面に固定、脚口ロボットなら胴体など)となる部分をリンク0として、手先に向かって各リンクに  $1, 2, \dots, n$  と番号をつける。

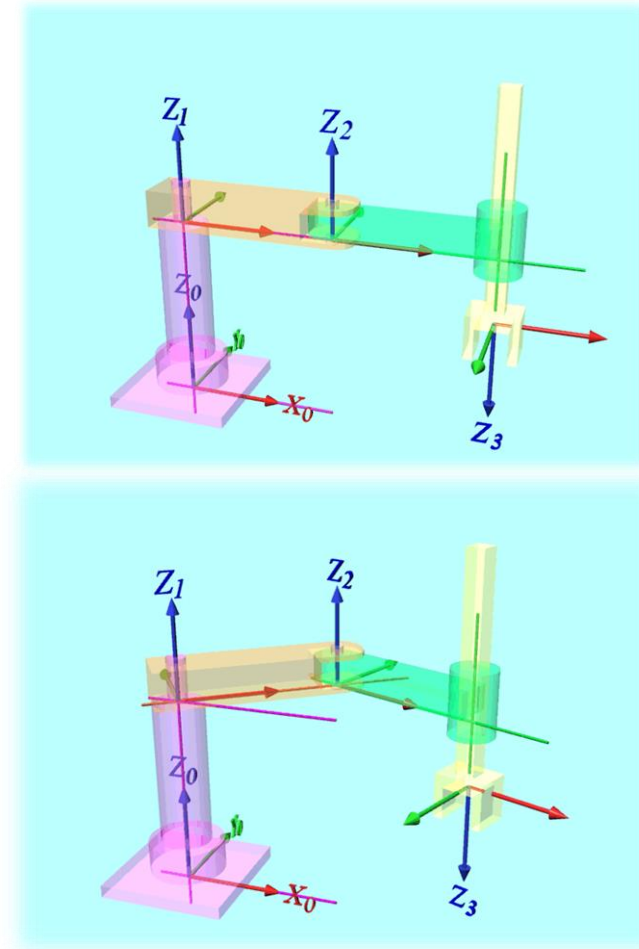


<http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/manipulator.html>

# 修正Denavit-Hartenberg記法

## 修正DH記法

(2) リンク  $i-1$  とリンク  $i$  の間の関節を、関節  $i$  とする。つまり、関節番号は  $1..n$  となる。

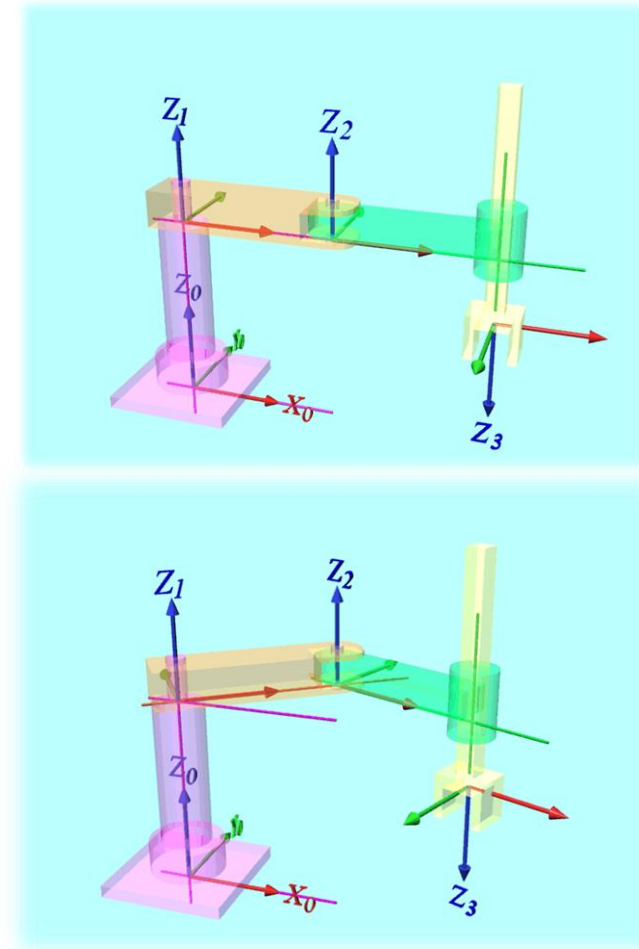


<http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/manipulator.html>

# 修正Denavit-Hartenberg記法

## 修正DH記法

(3) 各関節に関節軸を定義する。  
回転関節なら回転軸を、直動関節なら直動方向に平行な直線を関節軸 $i$ とする。

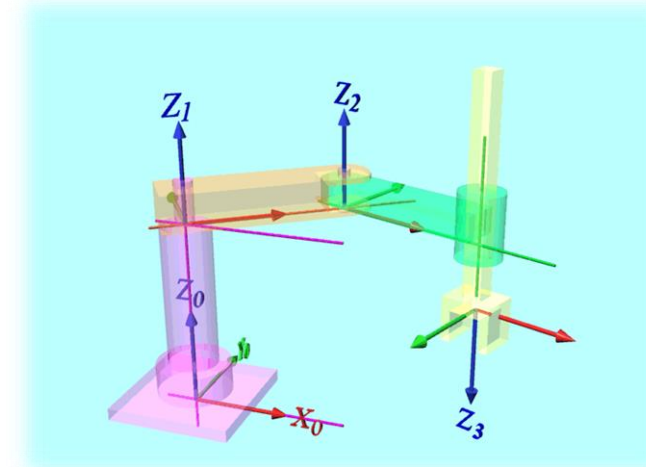
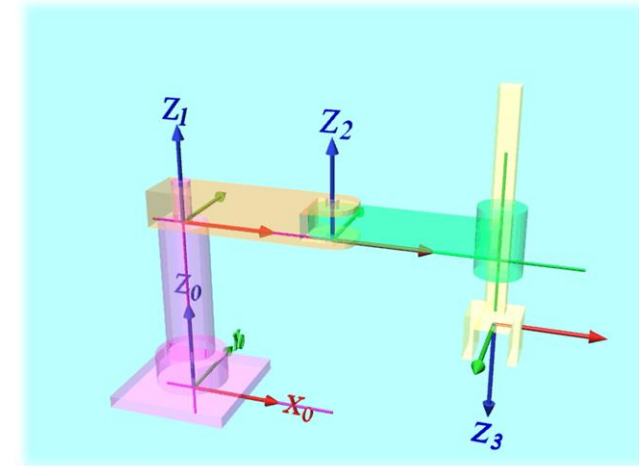


<http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/manipulator.html>

# 修正Denavit-Hartenberg記法

## 修正DH記法

- (4)  $Z_i$ 軸は関節軸 $i$ に一致させる。
- (5)  $X_i$ 軸は、 $Z_i$ 軸と $Z_{i+1}$ 軸の共通垂線にする。
- (6)  $Z_i$ と $X_i$ の交点が原点 $O_i$ になって、 $Z_i$ と $X_i$ の外積で $Y_i$ 軸が定まる。



<http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/manipulator.html>

# End

平行、回転、同次変換、マニピュレータの座標系の設定

# 参考文献

1. ロボット制御入門: 川村貞夫著 (Ohmsha)
2. ロボットシステム入門: 松日楽信人、大明準治著 (ohmsha)
3. 人工知能と社会: 2025年の未来予想: 栗原 聡、長井 隆行、小泉 憲裕、内海 彰、坂本 真樹、久野美和子著 (ohmsha)
4. メカトロニクス: 三浦宏文著 (ohmsha)
5. やさしい産業用ロボット読本: 川崎重工編 (日本能率協会)
6. はじめてのロボット創造設計: 坪内孝司、大隅久、米田完 (講談社)
7. ロボットモーション: 内山 勝、中村仁彦 (岩波書店)
8. [http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/GP2012\\_11.pdf](http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/GP2012_11.pdf)
9. <http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/manipulator.html>