学部講義ロボティックス 第4回演習課題

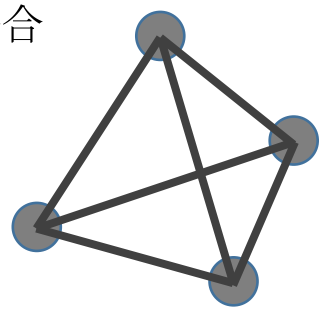
学籍番号

氏名

1.　剛体および自由度の定義を述べ、剛体の自由度を求めよ

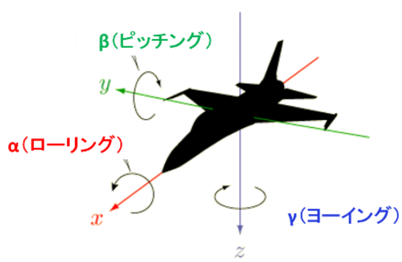
（回答）剛体とは、(　　　　)をもつ無限に小さな(　　　　)の粒子が無限個集まってできたものであり、互いの粒子間の(　　　　)は変化しない。自由度とは、運動を記述するのに使う変数の数から、その変数の間に存在する独立な(　　　　　　　)の数を引いたものである。

右図のように4つの粒子が4面体の頂点となる場合を考える。変数の数は（　）×（　）＝（　　）である。拘束条件は4面体の（　）本の辺の長さがそれぞれ一定で変わらないことである。したがって、4個の粒子からなる剛体の自由度は、（　　）－（　）＝（　）となる。ここに新しい粒子を加えてゆくと変数は（　）個ずつ増えるが、同時に拘束条件も（　）個ずつふえるため、剛体の自由度は（　）のままである。



2.　（ロール・ピッチ・ヨー）オイラー角による剛体の姿勢表現方法について説明せよ。

（回答）剛体の姿勢を（　　）個の変数であらわそうとするものである。剛体座標系をZ軸、Y軸、X軸まわりに順次γ、β、α回転させることで剛体の姿勢を表現する。このとき、姿勢変換行列は次式であらわせる。



$$R_{ZYX} = R_Z(\gamma)R_Y(\beta)R_X(\alpha)$$

（裏面につづく）。

3. 下図の 2020 年の東京オリンピックのエンブレムの市松模様の部分は回転行列：R(　　　　)による変換で区別がつかない図形である（1 回転する間に 3 回区別のつかない回転位置を経由する)。他方、パラリンピックの場合は（　　　　　　　　　）を有するが、回転対称性はもたない。

オリンピックエンブレム（左）とパラリンピックエンブレム（中央)、右はヒント

直交群の概念、回転および鏡像対称性について議論せよ。また、同次変換行列は直交行列ではないことを 3 次元の場合で示せ。

（回答）直交行列(A とする)は互いに直交する（垂直な）大きさが 1 のベクトルから構成されており、n 次元直交行列のつくる群（直交群）を O(n)とよぶ（3 次元の場合は O(3)となる)。回転対称性や鏡像（左右）対称性といった対称性は群という数学的概念を用いて表現される。

O(n)はベクトルの（　　　）を保存し、なおかつ（　　　）性のある変換すべてを含むため、回転のみならず鏡像変換も含む。

detA=－1 の変換は回転のみならず、鏡像変換も含むことが知られている。直交群のうち、とくに回転のみを含み、鏡像変換を含まない行列は detA=（　）を満たし、(n 次) 特殊直交群:SO(n) とよばれる。

直交行列の性質のひとつとして転置行列が逆行列になる。

ここで3次元の同次変換行列を${}^{O}_{A}H = \begin{bmatrix} & {}^{O}_{A}R & & {}^{O}p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$とする。

このとき、

$$ {}^{O}_{A}H^{-1} = {}^{A}_{O}H = \begin{bmatrix} & {}^{O}_{A}R^{T} & & -{}^{O}_{A}R^{T}\,{}^{O}p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & {}^{O}_{A}R^{T} & & 0 \\ & & & 0 \\ & (\quad) & & 1 \end{bmatrix} = {}^{O}_{A}H^{T} $$となり、

${}^{O}_{A}H$は直交行列の性質を満たさないため、直交行列ではない。