

# ロボティクス Robotics

先端工学基礎課程講義

小泉 憲裕

# 講義情報

授業内容と  
その進め方

## 【授業内容とその進め方】

### (a) 授業項目

- 第1回 ロボット工学概論  
ロボットの歴史、定義、基本構成と分類  
数学基礎知識
- 第2回 マニピュレータの基礎  
構造と分類、機構表現
- 第3回 センサとアクチュエータ
- 第4回 座標変換  
平行、回転変換、同次変換、マニピュレータの座標系の設定
- 第5回 順運動学と逆運動学
- 第6回 ヤコビ行列と静力学
- 第7回 順動力学と逆動力学
- 第8回 中間試験とその解説
- 第9回 フィードバック制御とその安定性
- 第10回 位置制御 (PTP制御とCP制御)
- 第11回 力制御 (インピーダンス制御)
- 第12回 マスタ・スレーブ制御
- 第13回 遠隔操作と自律制御
- 第14回 複数マニピュレータの協調制御
- 第15回 期末試験とその解説

### (b) 授業の進め方:

PPTを用いて内容を解説したあと、演習課題を解いてもらう。また、必要に応じて宿題を課すことがある。

# ダランベールの原理

問)ダランベールの原理について述べよ。

(回答)フランスの数学者( )は、( )の問題を( )の問題として扱えることを発見した。これを( )の原理という。この原理に従うと、仮想仕事の原理を静的平衡の問題から運動の問題へと拡張することができる。

# 擬似逆行列と最小二乗解

(問) 擬似逆行列を用いた最小二乗解について説明せよ。↵

(回答) 線形方程式  $y = Ax$  の解を求める問題とは、 $\|y - Ax\| = 0$

をみたす※の ( ) ノルム、すなわち、各成分の

( ) 和の正の ( ) をあらわす。( )

解が存在しない場合を問題にふくめるために、この問題を  $\min \|y - Ax\|$ 、すなわち誤差ベクトルの ( ) を最小にす

る  $x$  をみつける問題としよう。このような解は ( ) 二乗解

とよばれる。↵

( ) 逆行列を用いると ( ) 二乗解の一般解はつぎのようになる。↵

↵

$$x = A^\# y + (E_n - A^\# A)z \quad \leftarrow$$

# 疑似逆行列と最小二乗解

$$x = A^\# y + (E_n - A^\# A)z$$

ここで、 $z \in R^n$  は任意ベクトルである。解が1個以上に存在するときには、この式の $z$ を変化させることですべての解を与えることができる。( ) 二乗解の( ) ノルム解とは、上式があらわすすべての解のなかで $\|x\|$ を最小にするものである。最小二乗解の最小( ) 解はつぎのものである。

$$x = A^\# y$$

# 第9回 動力学

# 動力学

- 動力学の意味と必要性
- マニピュレータの運動方程式の導出法
  - ラグランジュ法
  - ニュートン・オイラー法
- マニピュレータの動力学上の特徴と利用法
- 応用話題:ニューラルネットワークによる動力学モデルの表現

# 動力学

(問) 動力学の計算について述べよ。+

(回答) ( ) 動力学の計算は必要な ( ) を生じさせるために、( ) に発生させるべき ( ) 力を計算するのにもちいられる。これはロボットの ( ) に必要とされる種類の計算である。また、( ) 動力学の計算は、加えた ( ) や関節 ( ) に対して、その結果生じるロボットの運動を ( ) する計算に用いられる。とくにロボットのリンク系の運動 ( ) に必要なのはこの計算である。これらの計算を ( ) におこなうことができれば、性能のよいコントローラ的设计 (逆動力学) や、コンピュータグラフィックスにおいて ( ) を考慮した自然な 3D 動画を制作する (順動力学) のに利用できる。+

# 運動方程式の利用法

## 1. 逆動力学問題 (制御に)

1. 目標軌道が既知で、駆動トルクを求める問題
2. 計算法: 軌道、速度、加速度を求めて、
  1. ラグランジュ法による運動方程式に代入
  2. ニュートン・オイラー法による運動方程式に代入
    1. 計算量が少ない(6自由度の場合、約1/80)

## 2. 順動力学問題 (シミュレーションに)

1. 駆動トルクが既知で、運動軌道を求める問題
2. 計算法: 同様二つ、ニュートン・オイラー法による運動方程式のほうは計算量が少ない

# 運動方程式導出法の比較表

	ニュートン・オイラー法	ラグランジュ法
長所	1. ( ) 量が小さい 2. ( ) に有効	1.簡潔な ( ) 方程式が得られる 2. ( ) 座標を使用出来る 3.力学パラメータの ( ) 性への影響を解析的に調べられる
短所	導かれる運動方程式が ( )	( ) 量で不利

# 運動学と静力学の応用

マニピュレータの運動制御, すなわちその手先を空間の1点から他の点に移動する場合



非常に運動がゆっくり

- 運動学を用いて目的の手先の位置に対応する関節角を求め, 各関節において位置制御などを行えば, 目的とする運動を実現することが可能
- 手先において静的な力を発生し, 環境にあるものを押すようなときも同様に各関節で必要となるトルクをヤコビ行列の逆行列を用いて求め, 各関節を力制御すれば実現可能

# 運動学、静力学を用いた運動・力制御の限界

マニピュレータの運動を高速化しようとしたり、  
マニピュレータの各リンクの質量が大きな場合



手先位置や手先で発生する力を精度よく制御することは困難

## 理由

マニピュレータの各部の質量に基づく慣性力や  
粘性に基づく力がマニピュレータの運動に及ぼす  
影響が次第に大きくなり、無視できなくなるため

# 動力学の必要性

マニピュレータを高速に、かつ精度よく制御する



マニピュレータの運動に影響を及ぼす各種の力を考慮した方法を取る必要がある

このため基礎となるのが

→ 动力学

その基本は

→ 運動方程式

# ラグランジュ法

## マニピュレータの特徴

マニピュレータの各リンクが剛体からなり、それらが関節を介して力の干渉を受け、互いに位置を拘束しながら運動するシステム

➡ 各リンクが関節を介して干渉する力を考慮しながら運動方程式を導くのは容易ではない。

# ラグランジュ法

煩雑さを避け、見通しよく運動方程式を導く方法



ラグランジュ法

対象物体の運動を記述するのに適した  
一般化座標を考え、それを用いて記述した  
エネルギーを用いて運動方程式を導く方法

# 運動方程式の導出と物理的な意味付け

質点の運動を取り扱うニュートンの運動方程式では通常、直交座標系が用いられる。

より一般的に運動  
を取り扱うために

物体の運動を記述するのに必要十分な  
変数からなる一般化座標を考える。

一般化座標を $q_i$ 、運動エネルギーを $T$ 、一般化座標に対応した力を一般化力 $Q_i$ とすれば、ニュートンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.1)$$

# 運動方程式の導出と物理的な意味付け

$Q_i$ がポテンシャルから導かれる場合は、ポテンシャルを $U$ として、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2.2)$$

$L=T-U$ で表されるラグランジュ関数 $L$ を導入すると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.3)$$

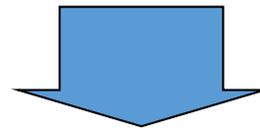
ポテンシャルで書き表せない力を $Q'_i$ のように書けば、

一般のラグランジュ  
の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad (2.4)$$

# ラグランジュ法による 一般のマニピュレータの運動方程式の導出

まず、マニピュレータを構成する  
各リンクの運動エネルギーを求める



運動学の表記を利用して

**基準座標系**に対するリンクの重心の並進速度と  
各リンク座標系に関するリンク重心点回りの角  
速度を求める

# 重心の並進速度

リンク*i*の重心の(*i* - 1)座標系に対する位置ベクトルを ${}^{i-1}\mathbf{p}_{gi}$ とするとベース座標系(0)では

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{p}_{gi} &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{p}_{gi} \\ &= {}^0\mathbf{T}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{p}_{gi} \end{aligned} \quad (2.8)$$



$\mathbf{A}_i$ : (*i* - 1)座標系から(*i*)座標系への変換を表す同次変換行列

${}^0\mathbf{T}_{i-1}$ : 0 ~ *i* - 1の各関節変位をパラメータとする関数

時間微分は各関節変位の時間微分の関数

$$\mathbf{v}_{gi} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_{\mathbf{p}_{gi}} & {}^0\dot{y}_{\mathbf{p}_{gi}} & {}^0\dot{z}_{\mathbf{p}_{gi}} \end{bmatrix}^T$$

# 角速度

リンク*i*の角速度ベクトルは0~*i*-1の関節のうち、  
回転運動を持つものによって生じる。

(*i*-1)座標系からみたリンク*i*の角速度ベクトルは  
次のように表される。

$${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i = {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{R}\dot{\theta}_i\hat{\mathbf{Z}}_i \quad (2.9)$$

${}^{i-1}_i\mathbf{R}$  : (*i*-1)座標系から(*i*)座標系への回転行列

$\hat{\mathbf{Z}}_i$  :  $z_i$ 軸方向の単位ベクトル

# 角速度

(2.9)式の両辺に左より ${}^i_{i-1}\mathbf{R}$ をかけると,

$${}^i\boldsymbol{\omega}_i = {}^i_{i-1}\mathbf{R}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \hat{\mathbf{Z}}_i \quad (2.10)$$

したがって、 ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$ を順次、**根元から先端リンクの方向に向かって**計算することにより、 $\boldsymbol{\omega}_i$ 求めることができる。

即ち

0~ $i-1$ の各関節の角速度ベクトルを $i$ 座標系に変換して加算したものとなっている。

# リンク*i*の運動エネルギー

並進運動のエネルギーと回転運動のエネルギーの和として、リンク*i*の運動エネルギーは

$$k_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{gi}^T \mathbf{v}_{gi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.11)$$

$m_i$  : リンク*i*の質量

$\mathbf{v}_{gi}$  : リンク*i*の重心の並進速度

$\boldsymbol{\omega}_i$  : リンク*i*の重心回りの角速度

$\mathbf{I}_i$  : リンク*i*の重心に関する慣性テンソル

# 総運動エネルギーと総ポテンシャルエネルギー

マニピュレータの総運動エネルギー $T$ は

$$T = \sum_{i=0}^n k_i \quad (2.12)$$

外力として重力場のポテンシャルを考えると、  
位置エネルギー $u_i$ は

$$u_i = -m_i g p_{gi} + u_{const_i} \quad (2.13)$$

$p_{gi}$  : リンク $i$ の固定座標系に対する重心の位置座標

総ポテンシャルエネルギー $U$ は

$$U = \sum_{i=0}^n u_i \quad (2.14)$$

# ラグランジュ方程式

ラグランジュ関数を $L=T-U$ とし、ラグランジュ方程式に代入すると、以下のように運動方程式が求められる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad (2.15)$$

$Q'_i$ : 関節アクチュエータで発生されるトルクに基づく力

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

## SICE-DDアーム

- 2自由度の平面リンク
- 水平面を可動範囲とするので重力の影響は無視

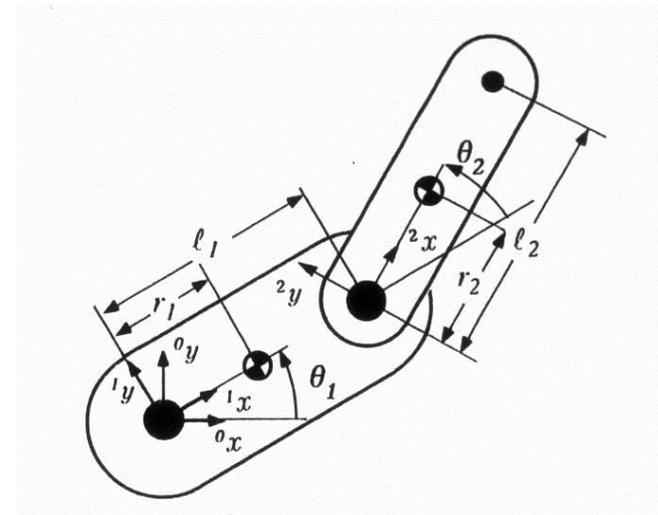


図2.2 SICE-DDアームモデル

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

座標系( $i-1$ )から座標系( $i$ )への変換を $\mathbf{A}_i$ とすれば,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

したがってリンク1, 2の重心点 $\mathbf{p}_{g1}$ ,  $\mathbf{p}_{g2}$ は

$$\mathbf{p}_{g1} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{p}_{g2} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

(2.18), (2.19)式を時間微分して求まる重心点の固定座標系に関する並進速度ベクトル $\mathbf{v}_{g1}$ ,  $\mathbf{v}_{g2}$ は

$$\mathbf{v}_{g1} = \begin{bmatrix} -r_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ r_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{v}_{g2} = \begin{bmatrix} -r_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

各リンクのリンク座標系に関する角速度ベクトル ${}^1\boldsymbol{\omega}_1, {}^2\boldsymbol{\omega}_2$ は

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{z}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}^1 \boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

これらを(2.11)～(2.14)式に代入して、全エネルギーを求めると

$$T = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2r_2 l_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] m_2 \\ + \frac{1}{2} I_{zzg_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zzg_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (2.25)$$

となり、この場合ポテンシャルエネルギーはないので、これがラグランジュ関数となる。

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

$\theta_1\theta_2$ を一般化座標と考え、(2.15)式より運動方程式は以下のようにまとめられる。

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_2 r_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_2 r_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ただし、

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} I_{zzg_1} + I_{zzg_2} + m_1 r_1^2 + m_1 r_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 r_2 \cos \theta_2 & & & \\ & I_{zzg_2} + m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 \cos \theta_2 & & \\ & & I_{zzg_2} + m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 \cos \theta_2 & \\ & & & I_{zzg_2} + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

であり、 $\tau_1\tau_2$ は各関節の駆動トルクである。

# ラグランジュ法によるSICE-DDアームの運動方程式

ここで  $I_{zzg_i}$  はリンク*i*の重心点回り*z*軸に関する慣性モーメントで以下の慣性テンソルの要素である.

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xxg_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyg_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzg_i} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

# End

順動力学と逆動力学

# 参考文献

1. ロボット制御入門: 川村貞夫著 (Ohmsha)
2. ロボットシステム入門: 松日楽信人、大明準治著 (ohmsha)
3. 人工知能と社会: 2025年の未来予想: 栗原 聡、長井 隆行、小泉 憲裕、内海 彰、坂本 真樹、久野美和子著 (ohmsha)
4. メカトロニクス: 三浦宏文著 (ohmsha)
5. やさしい産業用ロボット読本: 川崎重工編 (日本能率協会)
6. はじめてのロボット創造設計: 坪内孝司、大隅久、米田完 (講談社)
7. ロボットモーション: 内山 勝、中村仁彦 (岩波書店)
8. [http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/GP2012\\_11.pdf](http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/GP2012_11.pdf)
9. <http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/manipulator.html>